p-Laplacian 方程组大解的存在性*

印凡成[1]，王滕滕[1]，黄健元[2]
（1. 河海大学理学院，江苏 南京 210098；
2. 河海大学公共管理学院，江苏 南京 210098）

摘　要：为了研究强耦合项的非线性椭圆型 p-Laplacian 方程组大解的存在性问题，文章运用上下解方法，主要讨论 $\mathbf{R}^N$ 上一类椭圆型方程组大解的存在性及需要满足的条件。关键在于通过一组不等式的可解性，寻求可解的条件，从而得到方程组大解存在需要满足的条件，即（$a-p+1$）（$e-q+1$）$<bc$。

关键词：非线性椭圆型 p-Laplacian 方程组；比较原理；上下解；大解
中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）04－0045－05

Existence of Large Solutions of the Quasilinear Elliptic p-Laplacian System

YIN Fancheng[1]，*WANG Tengteng*[1]，*HUANG Jianyuan*[2]
（1. School of Science，Hohai university，Nanjing 210098，China；
2. School of Public Administration，Hohai university，Nanjing 210098，China）

Abstract：The sub-super solution method is used to research the existence of large solutions of the quasilinear elliptic p-Laplacian system which is exponential. The existence and sufficient conditions of large solutions of the quasilinear elliptic p-Laplacian system are discussed. The key point is to establish a set of inequalities which have solutions to get the sufficient conditions. The sufficient condition of the quasilinear elliptic p-Laplacian system is obtanined，which is $(a-p+1)(e-q+1)<bc$.

Key words：quasilinear elliptic p-Laplacian system；weak comparison principle；sub-super solutions；large solutions

对椭圆型 p-Laplacian 方程解的研究一直是学者们感兴趣的问题，已经得到了大量深刻的结果。有关 p-Laplacian 方程在全空间 $\mathbf{R}^N$ 上解的存在性研究，常用的方法有不动点法，变分法，上下解法，运用山路引理等。各类方法各有其特殊性和优势，同时也有其局限性。关于椭圆型 p-Laplacian 方程的大解，国内外许多学者已经运用不同的方法进行了研究。文献［1］运用上下解方法得到方程

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u)=0,\qquad x\in\mathbf{R}^N$$

的整体解。文献［2］也运用上下解方法研究非线性椭圆型方程

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=m(x)f(u)\\ u|_{\partial\Omega}=\infty\end{cases}$$

在光滑有界区域 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^N$ 和整个 $\Omega=\mathbf{R}^N$ 空间正的边界爆破弱解的存在性。关于有界区域上单个方程形如

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=m(x)u^{\gamma};\quad x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\infty\end{cases}$$

其中 $p>1,\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 的问题，很多学者都有研究，并有所收获。尤其在文献［3］中，作者分别证明了方程在 $\gamma>p-1$，$\Omega=\mathbf{R}^N$ 或 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 上的有界区域，以及在 $\gamma<p-1$，$\Omega=\mathbf{R}^N$ 或 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 上的有界区域时，大解的存在性。当 $p=2$ 时，相关的结论已在文献［4－5］中得到。在文献［4］中，作者着重研究了非线性方程大解存在性问题

* **收稿日期**：2011－09－24
基金项目：中央高校基本科研业务费重点资助项目（2010B28514）
作者简介：印凡成（1958 年生），男，副教授；**通讯作者**：王滕滕；E-mail：wangtengtengw@163.com

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)+\lambda(|x|)|\nabla u(x)|^{m-1}= \\ \varphi(x,u(x)),x\in\Omega=\mathbf{R}^N \\ u\geqslant 0 \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$$

其中 $m>1,\lambda:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数，φ: $\mathbf{R}^N\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 也是连续函数。同样方程组以及 p（x）-Laplacian 方程组问题也有很多学者进行了研究。在文献［5］中，作者考虑了下面不含梯度项的方程组

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u,v)=0, & x\in\mathbf{R}^N \\ \operatorname{div}(|\nabla v|^{q-2}\nabla v)+g(x,u,v)=0, & x\in\mathbf{R}^N\end{cases}$$

的正的整体解的存在性。文献［6］中，作者研究了下列非线性椭圆型方程组

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=u^{m_1}v^{n_1}, & x\in\Omega\subset\mathbf{R}^N \\ \operatorname{div}(|\nabla v|^{q-2}\nabla v)=u^{m_2}v^{n_2}, & x\in\Omega\subset\mathbf{R}^N\end{cases}$$

在有界区域边界大解的存在性问题。

在上述文献中，虽然研究到非线性方程组解的问题，但涉及方程组大解问题的研究非常少。本文将依据比较原理，借鉴文献［7］中单个方程在无界区域上大解存在性问题的上下解方法，通过联立解不等式组的方式，结合具体情况，考虑上下解存在时需要满足的条件，研究如下无界区域上强耦合项的非线性椭圆型 p-Laplacian 方程组

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=m(x)u^av^b \\ \operatorname{div}(|\nabla v|^{q-2}\nabla v)=n(x)u^cv^e \quad x\in\mathbf{R}^N \\ u,v\geqslant 0 \text{ in } \mathbf{R}^N \\ u(x),v(x)\to\infty,\text{as}|x|\to\infty\end{cases}\tag{1}$$

大解的存在性问题。其中 $1<p<N,1<q<N,a,b,c,e>0,m(x),n(x)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的非负函数，在 $\mathbf{R}^N$ 上 Hölder 连续。

1 预备知识和引理

定义 1 函数对 $(\underline{u},\underline{v})$ 称为（1）的下解，若

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u})\geqslant m(x)\underline{u}^a\underline{v}^b \\ \operatorname{div}(|\nabla\underline{v}|^{q-2}\nabla\underline{v})\geqslant n(x)\underline{u}^c\underline{v}^e \\ \underline{u},\underline{v}\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^N \\ \underline{u}(x),\underline{v}(x)\to\infty,\text{as}|x|\to\infty\end{cases}\tag{2}$$

这里 $1<p<N,1<q<N,a,b,c,e>0,m(x),n(x)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的非负函数，在 $\mathbf{R}^N$ 上 Hölder 连续，函数对 $(\underline{u},\underline{v})\in C^{1,\theta}(\mathbf{R}^N)\times C^{1,\theta}(\mathbf{R}^N)$，其中指数 $\theta\in(0,1)$。

函数对 $(\bar{u},\bar{v})$ 称为（1）的上解，若

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u})\leqslant m(x)\bar{u}^a\bar{v}^b \\ \operatorname{div}(|\nabla\bar{v}|^{q-2}\nabla\bar{v})\leqslant n(x)\bar{u}^c\bar{v}^e \\ \bar{u},\bar{v}\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^N \\ \bar{u}(x),\bar{v}(x)\to\infty,\text{as}|x|\to\infty\end{cases}\tag{3}$$

这里 $1<p<N,1<q<N$，$a,b,c,e>0$，$m(x)$，$n(x)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的非负函数，指数 $\theta\in(0,1)$，在 $\mathbf{R}^N$ 上 Hölder 连续，函数对 $(\bar{u},\bar{v})\in C^{1,\theta}(\mathbf{R}^N)\times C^{1,\theta}(\mathbf{R}^N)$。

定义 2 方程（1）的解 $u(x)$ 如果满足当 $x\to\partial\Omega$ 时，有 $u\to\infty$，则称 $u(x)$ 为方程（1）的大解，也称爆破解。如果 $\Omega=\mathbf{R}^N$，$x\to\partial\Omega$ 也就是 $|x|\to\infty$，这样的解 $u(x)$ 称为整体大解，也称整体爆破解。

引理 1[8]**（弱比较原理）** 设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$（$N\geqslant 2$）上的有界区域，边界 $\partial\Omega$ 光滑，并且 θ 是 $(0,\infty)\to(0,\infty)$ 的连续不减函数，设 $u_1,u_2\in W^{1,p}(\Omega)$，且对任意的非负函数 $\psi\in W^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\nabla\psi\mathrm{d}x+\int_\Omega\theta(u_1)\psi\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_\Omega|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\nabla\psi\mathrm{d}x+\int_\Omega\theta(u_2)\psi\mathrm{d}x$$

如果在边界 $\partial\Omega$ 有不等式 $u_1\leqslant u_2$ 成立，则在有界区域 Ω 上不等式 $u_1\leqslant u_2$ 也成立。

引理 2[9]**（单个方程的上下解原理）** 非线性椭圆型方程

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u)=0,x\in\mathbf{R}^N\tag{4}$$

设 $f(x,u)$ 是定义在 $\mathbf{R}^{N+1}$，关于 x 是 Hölder 连续，进一步假设存在函数 $v,w\in C^{1+\lambda}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ 满足

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)+f(x,v)\leqslant 0,x\in\mathbf{R}^N & (5)\\ \operatorname{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)+f(x,w)\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^N & (6)\\ w(x)\leqslant v(x),x\in\mathbf{R}^N & (7)\end{cases}$$

其中指数 $\lambda\in(0,1)$ 且 $f(x,u)$ 关于 u 在 $\{(x,u):x\in\mathbf{R}^N,w(x)\leqslant x\leqslant v(x)\}$ 是 Hölder 连续，则方程（4）有整体解 $u(x)$ 满足 $w(x)\leqslant u(x)\leqslant v(x)$，$x\in\mathbf{R}^N$。

证明 设 B_R 是 $\mathbf{R}^N$ 上半径为 R 的球，考虑边值问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u)=0,x\in B_R & (8)\\ u|_{\partial B_R}=g & (9)\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是满足 $w(x)\leqslant g\leqslant v(x)$ 的函数。对于（8）-（9），$v(x)$ 对所有的 R 都是上解，$w(x)$ 对所有的 R 都是下解，且在 B_R 内满足 $w(x)\leqslant v(x)$，通过在文献［10］中的 $C^{1,\alpha}(\overline{B_R})$ 的估计，以及文献［11］中的重述，可以得到这样一个结论，即

存在 $u \in C^1(\overline{B_R})$，它是方程（4）的在 B_R 上满足 $w(x) \leqslant u_R(x) \leqslant v(x)$ 的一个弱解。

现在，我们应用椭圆型内部估计以及对角线处理，得到结论：$\{u_R : R \geqslant 1\}$ 有一个序列 $\{u_{R_k} : R_k \uparrow \infty\}$，使得 $\{u_{R_k}\}$ 在 $\mathbf{R}^N$ 上逐点收敛到函数 u，且这个收敛集合在 $\mathbf{R}^N$ 上的每个紧集上都包含在 C^1 内。（因此，其中也包含了 $u \in C^1$，满足 $w(x) \leqslant u(x) \leqslant v(x)$ 的 $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0$ 的情况。）

第一步，在 B_2 上，$\{u_R : R \geqslant 2\}$ 一致地受限于 $w(x)$ 和 $v(x)$，因为 $w(x)$ 和 $v(x)$ 都是 B_2 上的有界函数，所以存在 $M > 0$，使得对于所有的 $R \geqslant 2$，都有 $f(x,u_R(x))_{L^\infty(B_2)} \leqslant M$ 和 $u_R(x)_{L^\infty(B_2)} \leqslant M$ 成立。由方程（4），u_R 满足 $\int_{B_2} |\nabla u_R|^p = \int_{B_2} f u_R$。因此 $\int_{B_2} |\nabla u_R|^p \leqslant f_0(\mathrm{meas} B_2)^{\frac{1}{q}} C_1 \nabla u_{R p}$。这里 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$，$C_1$ 是 Sobolev 嵌入常数。所以有 $u_{R1,p} \leqslant C_2 f_0^{\frac{(p-1)}{p}}$。当 $1 < p < N$ 时，将 $W_0^{1,p}(B_2)$ 嵌入到 $L^{\frac{Np}{N-p}}(B_2)$ 中，即 $u_R \in L^{\frac{Np}{N-p}}(B_2)$。应用文献［12，p. 286－287］中的定理 7.1，我们可以得到如下估计：

$$\sup\{|u_R|; x \in B_2\} \leqslant C_3 \tag{10}$$

这里 $C_3 = C_3(f_0)$。如果 $p \geqslant N$，我们由 Sobolev 嵌入定理可以得到（10）。应用文献［12，p. 251］中的定理 1.1，我们知道对于某些 $0 < \alpha < 1$，$u_R \in C^\alpha(\overline{B_2})$，以及 $u_{RC^2} \leqslant C_4$，这里 C_4 由 C_3 决定。由文献［13，p. 806］中的命题 3.7，我们也能得到 $u_R \in C^{1,\alpha}(\overline{B_2})$ 和 $u_{RC^{1,\alpha}} \leqslant C_5$，这里 C_5 由 C_4 决定。

从上面的讨论我们可以知道存在 $C > 0$，使得对于所有的 $R > 2$，不等式 $u_{RC^{1+\alpha}(B_1)} \leqslant C$ 成立。因为 $C^{1+\alpha}(B_1) \to C^1(B_1)$ 是紧集，所以存在由 $\{u_{R_{1j}}\}_{j=1,2\ldots}$ 标记的序列（其中 $R_{1j} \uparrow \infty$），该序列在 $C^1(B_1)$ 上收敛。令 $u_1(x) = \lim\limits_{j\to\infty} u_{R_{1j}}(x)$，$x \in B_1$，则 u_1 是满足 $w(x) \geqslant u_1 \geqslant v(x)$ 的（8）－(9) 解。

第二步，重复第一步，直到存在一个序列 $\{u_{R_{?1j}}\}_{j=1,2,\ldots}$，得到其后继序列 $\{u_{R_{2m}}\}_{m=1,2,\ldots}$ 在 $C^1(B_2)$ 内收敛到极限 u_2。则同样地 u_2 也是（8）－（9）的解，且 $u_2|_{B_1} = u_1$。再在 B_3 上重复第一步，……等等。用这种方式，我们得到一个序列 $\{u_{R_{kj}}\}_{j=1,2,\ldots}$，它在 $C^1(B_k)$ 上收敛，并且是 $\{u_{R_{(k-1)j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ 的后继序列。令 $u_k(x) = \lim\limits_{j\to\infty} u_{R_{kj}}$，则 u_k 是（8）－（9）在 B_k 上的解，且有 $u_k|_{B_{k-1}} = u_{k-1}$。

第三步，通过对角线处理，得到对于每一个 k，序列 $\{u_{R_{mm}}\}_{m=1,2\ldots}$ 是 $\{u_{R_{kj}}\}_{j=1,2\ldots}$ 的后继序列。这样，对于 B_k 上的每一个 k，都有 $\lim\limits_{m\to\infty} u_{R_{mm}} = u_k$。所以，如果我们定义 $u(x) = \lim\limits_{m\to\infty} u_{R_{mm}}(x)$，则 $u(x)$ 满足 $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0$ 以及 $v(x) \geqslant u(x) \geqslant w(x)$（因为对于每一个 k，都有 $v(x) \geqslant u_k(x) \geqslant w(x)$）。

注 1 函数 $v(x)$（或 $w(x)$）满足偏微分不等式（5）（或（6））被称为方程（4）在 $\mathbf{R}^N$ 上的上解（或下解）。

引理 3[5] **（方程组的上下解原理）** 非线性椭圆型方程组

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u,v) = 0, & x \in \mathbf{R}^N \\ \operatorname{div}(|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + g(x,u,v) = 0, & x \in \mathbf{R}^N \end{cases} \tag{11}$$

假定 $f(x,u,v)$ 和 $g(x,u,v)$ 都是定义在 $\mathbf{R}^N \times I \times I$，$I = (0,\infty)$，关于 x 是 Hölder 连续，关于 u,v 是 Lipschitz 连续。如果在 $\mathbf{R}^N$ 上存在方程组（11）的一个上解 $(\bar{u},\bar{v})$ 和一个下解 $(\underline{u},\underline{v})$，且在 $\mathbf{R}^N$ 上 $\bar{u} \geqslant \underline{u}$，$\bar{v} \geqslant \underline{v}$，则问题（11）在 $\mathbf{R}^N$ 上存在解 (u,v)，满足

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x),\ \underline{v}(x) \leqslant v(x) \leqslant \bar{v}(x)$$

证明 利用和引理 2 相同的证明方法，即可证得引理 3。具体步骤可参见文献［5］。

2 主要定理

本文主要研究强耦合项的非线性椭圆型方程组（1）大解的存在性问题。其中 $1 < p < N$，$1 < q < N$，$a,b,c,e > 0$，$m(x)$，$n(x)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的非负函数，在 $\mathbf{R}^N$ 上 Hölder 连续。这里所说的大解，也就是一个函数对 $(u,v) \in C^{1,\theta}(\mathbf{R}^N) \times C^{1,\theta}(\mathbf{R}^N)$，在 $\mathbf{R}^N$ 上的每一点 x 都满足（1），其中指数 $\theta \in (0,1)$。方程组（1）大解存在需要满足的条件是 $(a-p+1)(e-q+1) < bc$。

由前面的定义知，若满足（2）式，函数对 $(\underline{u},\underline{v})$ 称为（1）的下解；若满足（3）式，函数对 $(\bar{u},\bar{v})$ 称为（1）的上解。

任意 $m(x)$，$n(x)$ 连续，且 $\exists R_0 > 0$，$m_1, m_2 > 0$，$n_1, n_2 > 0$ 和 $\alpha,\beta \in \mathbf{R}^1$，使得

$$m_1|x|^\alpha \leqslant m(x) \leqslant m_2|x|^\alpha,\ |x| \geqslant R_0 \tag{12}$$

$$n_1|x|^\beta \leqslant n(x) \leqslant n_2|x|^\beta,\ |x| \geqslant R_0 \tag{13}$$

取

$$V_k = \alpha_k |x|^{\frac{p+k}{p-1}}, \alpha_k = (N+k)^{\frac{1}{1-p}} \cdot \frac{p-1}{p+k},$$

$$U_k = \beta_k |x|^{\frac{q+k}{q-1}}, \beta_k = (N+k)^{\frac{1}{1-q}} \cdot \frac{q-1}{q+k}$$

容易验证

$$\operatorname{div}(|\nabla V_k|^{p-2} \nabla V_k) = |x|^k,\ x \in \mathbf{R}^N \quad (14)$$

取

$$\underline{u} = \lambda V_k,\ \underline{v} = \mu U_n \quad (15)$$

这里 $\lambda, \mu > 0$ 为参数, $n, k > 0$。

$$\bar{u} = \bar{\lambda}(1 + V_{k'}),\quad \bar{v} = \bar{\mu}(1 + U_{n'}) \quad (16)$$

这里 $k' \geqslant k, n' \geqslant n, \bar{\lambda} \geqslant \lambda, \bar{\mu} \geqslant \mu$。

定理 1（解存在的条件） 当 $(a-p+1)(e-q+1) < bc$ 时，问题（1）存在解 (u,v)，满足 $\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x)$, $\underline{v}(x) \leqslant v(x) \leqslant \bar{v}(x)$

定理 2（上下解原理） 若问题（1）存在上下解 $(\bar{u},\bar{v})$ 和 $(\underline{u},\underline{v})$，且 $\bar{u} \geqslant \underline{u}, \bar{v} \geqslant \underline{v}, x \in \mathbf{R}^N$, 则问题（1）存在解 (u,v)，满足

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x), \underline{v}(x) \leqslant v(x) \leqslant \bar{v}(x)$$

下面证明由（15）–（16）所定义的函数是问题（1）的上下解。取

$$M_R = \max_{|x| \leqslant R} m(x),\ N_R = \max_{|x| \leqslant R} n(x),$$

$$m_R = \min_{|x| \leqslant R} m(x),\ n_R = \min_{|x| \leqslant R} n(x)$$

先考虑下解的情况，当 $|x| \leqslant R_0$ 时

$$\begin{aligned} m(x)\,\underline{u}^a\,\underline{v}^b &= m(x)\lambda^a\mu^b V_k^a U_n^b = \\ m(x)\lambda^a\mu^b\alpha_k^a\beta_n^b |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}} &\cdot |x|^{\frac{b(q+n)}{q-1}} = \\ \lambda^a\mu^b m(x)\alpha_k^a\beta_n^b |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ \lambda^a\mu^b m(x) C |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ \lambda^a\mu^b M_R C |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \lambda^{p-1}|x|^k \end{aligned}$$

则

$$\frac{a(p+k)}{p-1} + \frac{b(q+n)}{q-1} \geqslant k$$

因为 $|x| \leqslant R_0, r_0 < 0$ 时，有 $R_0^{r_0} \leqslant |x|^{r_0}$，令

$$\frac{a(p+k)}{p-1} + \frac{b(q+n)}{q-1} + r_0 = k$$

则

$$\begin{aligned} CM_R\lambda^a\mu^b R_0^{-r_0}R_0^{r_0}|x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ CM_R R_0^{-r_0}\lambda^a\mu^b |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}+r_0} &= \\ CM_R R_0^{-r_0}\lambda^a\mu^b |x|^k &\leqslant \lambda^{p-1}|x|^k \end{aligned}$$

即

$$\mu^b CM_R R_0^{-r_0} \leqslant \lambda^{p-1-a} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} n(x)\,\underline{u}^c\,\underline{v}^e &= n(x)\lambda^c\mu^e V_k^c U_n^e = \\ n(x)\lambda^c\mu^e\alpha_k^c\beta_n^e |x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}} &\cdot |x|^{\frac{e(q+n)}{q-1}} \leqslant \\ \lambda^c\mu^e n(x) C |x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ \lambda^c\mu^e N_R C |x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}} &\leqslant \mu^{q-1}|x|^n \end{aligned}$$

则 $\dfrac{c(p+k)}{p-1} + \dfrac{e(q+n)}{q-1} \geqslant n$。

因为 $|x| \leqslant R_0, r'_0 < 0$ 时有 $R_0^{r'_0} \leqslant |x|^{r'_0}$，令

$$\frac{c(p+k)}{p-1} + \frac{e(q+n)}{q-1} + r'_0 = n$$

则有

$$\begin{aligned} CN_R\lambda^c\mu^e R_0^{-r'_0}R_0^{r'_0}|x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ CN_R R_0^{-r'_0}\lambda^c\mu^e |x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}+r'_0} &= \\ CN_R R_0^{-r'_0}\lambda^c\mu^e |x|^n &\leqslant \mu^{q-1}|x|^n \end{aligned}$$

即

$$\lambda^c CN_R R_0^{-r'_0} \leqslant \mu^{q-1-e} \quad (18)$$

联立（17）和（18）解不等式组

$$\begin{cases} \mu^b c_1 \leqslant \lambda^{p-1-a} \\ \lambda^c c_2 \leqslant \mu^{q-1-e} \end{cases}$$

当 $b - \dfrac{(a-p+1)(e-q+1)}{c} > 0$ 时有解，即 $(a-p+1)(e-q+1) < bc$。

解以上不等式组可得

$$\begin{cases} c_1^{\frac{1}{p-1-a}}\mu^{\frac{b}{p-1-a}} \leqslant \lambda \leqslant c_2^{-\frac{1}{c}}\mu^{\frac{q-1-e}{c}} \\ c_2^{\frac{1}{q-1-e}}\lambda^{\frac{c}{q-1-e}} \leqslant \mu \leqslant c_1^{-\frac{1}{b}}\lambda^{\frac{p-1-a}{b}} \end{cases}$$

当 $|x| \geqslant R_0$ 时,

$$\begin{aligned} m(x)\,\underline{u}^a\,\underline{v}^b &= m(x)\lambda^a\mu^b V_k^a U_n^b = \\ m(x)\lambda^a\mu^b\alpha_k^a\beta_n^b |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}} &\cdot |x|^{\frac{b(q+n)}{q-1}} = \\ \lambda^a\mu^b m(x)\alpha_k^a\beta_n^b |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ \lambda^a\mu^b m(x) C |x|^{\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ \lambda^a\mu^b Cm_2 |x|^{\alpha+\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \lambda^{p-1}|x|^k \end{aligned}$$

则 $\alpha + \dfrac{a(p+k)}{p-1} + \dfrac{b(q+n)}{q-1} \leqslant k$。

因为 $|x| \geqslant R_0, r_0 > 0$ 时，有 $R_0^{r_0} \leqslant |x|^{r_0}$，令 $\alpha + \dfrac{a(p+k)}{p-1} + \dfrac{b(q+n)}{q-1} + r_0 = k$,

$$\begin{aligned} Cm_2\lambda^a\mu^b R_0^{-r_0}R_0^{r_0}|x|^{\alpha+\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}} &\leqslant \\ Cm_2 R_0^{-r_0}\lambda^a\mu^b |x|^{\alpha+\frac{a(p+k)}{p-1}+\frac{b(q+n)}{q-1}+r_0} &= \\ Cm_2 R_0^{-r_0}\lambda^a\mu^b |x|^k &\leqslant \lambda^{p-1}|x|^k \end{aligned}$$

即

$$\mu^b Cm_2 R_0^{-r_0} \leqslant \lambda^{p-1-a} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} n(x)\,\underline{u}^c\,\underline{v}^e &= n(x)\lambda^c\mu^e V_k^c U_n^e = \\ n(x)\lambda^c\mu^e\alpha_k^c\beta_n^e |x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}} &\cdot |x|^{\frac{e(q+n)}{q-1}} \leqslant \\ \lambda^c\mu^e n(x) C |x|^{\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}} &\leqslant \end{aligned}$$

$$\lambda^c\mu^e Cn_2 |x|^{\beta+\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}} \leqslant \mu^{q-1}|x|^n$$

则 $\beta + \dfrac{c(p+k)}{p-1} + \dfrac{e(q+n)}{q-1} \leqslant n$。

因为 $|x| \geqslant R_0, r'_0 > 0$ 时有 $R_0^{r'_0} \leqslant |x|^{r'_0}$，令 $\beta + \dfrac{c(p+k)}{p-1} + \dfrac{e(q+n)}{q-1} + r'_0 = n$，

$$Cn_2\lambda^c\mu^e R_0^{-r'_0}R_0^{r'_0}|x|^{\beta+\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}} \leqslant Cn_2R_0^{-r'_0}\lambda^c\mu^e|x|^{\beta+\frac{c(p+k)}{p-1}+\frac{e(q+n)}{q-1}+r'_0} = Cn_2R_0^{-r'_0}\lambda^c\mu^e|x|^n \leqslant \mu^{q-1}|x|^n$$

即

$$\lambda^c Cn_2 R_0^{-r'_0} \leqslant \mu^{q-1-e} \tag{20}$$

联立（19）和（20）解不等式组

$$\begin{cases}\mu^b c_1 \leqslant \lambda^{p-1-a} \\ \lambda^c c_2 \leqslant \mu^{q-1-e}\end{cases}$$

同样地，当 $b - \dfrac{(a-p+1)(e-q+1)}{c} > 0$ 时有解，即 $(a-p+1)(e-q+1) < bc$。

解以上不等式组可得

$$\begin{cases}c_1^{\frac{1}{p-1-a}}\mu^{\frac{b}{p-1-a}} \leqslant \lambda \leqslant c_2^{-\frac{1}{c}}\mu^{\frac{q-1-e}{c}} \\ c_2^{\frac{1}{q-1-e}}\lambda^{\frac{c}{q-1-e}} \leqslant \mu \leqslant c_1^{-\frac{1}{b}}\lambda^{\frac{p-1-a}{b}}\end{cases}$$

类似地，对于方程组的上解可得到同样的结论。

综上可得，由（15）－（16）所定义的函数是问题（1）的上下解。也验证了猜测结论：当 $(a-p+1)(e-q+1) < bc$ 时，问题（1）存在解 (u, v)，满足 $\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x)$ $\underline{v}(x) \leqslant v(x) \leqslant \bar{v}(x)$ 的成立。由上下解原理，得到无界区域上方程组（1）解的存在性。再根据无界区域上大解的定义，当 $|x| \to \infty$ 时，$u(x), v(x) \to \infty$，最终得方程组（1）大解的存在性。

3　结　语

文章探讨了无界区域上强耦合项的非线性椭圆型 p-Laplacian 方程组大解的存在性，并得到大解存在需要满足的条件 $(a-p+1)(e-q+1) < bc$. 目前探讨比较多的主要是一些特殊形式的方程和方程组，对于更一般的情况类似条件是否同样满足还有待展开进一步研究。

参考文献：

[1] YANG Z D. Existence of positive bounded entire solutions for quasilinear elliptic equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 156: 743－754.

[2] YANG Z D, XU B, WU M Z. Existence of positive boundary blow-up solutions for quasilinear elliptic equations via sub and supersolutions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 492－498.

[3] LU Q S, YANG Z D, TWIZELL E H. Existence of entire explosive positive solutions of quasi-linear elliptic equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 148: 359－372.

[4] LIU C L, YANG Z D. Existence of large solutions for quasilinear elliptic problems with a gradient term [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 192: 533－545.

[5] MIAO Q, YANG Z D. On the existence of multiple positive entire solutions for a quasilinear elliptic systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 198: 12－23.

[6] WU M Z, YANG Z D. Existence of boundary blow-up solutions for a class of quasilinear elliptic systems with critical case [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 198: 574－581.

[7] GONCALVES J V, RONCALLI A. Existence, non-existence and asymptotic behavior of blow-up entire solutions of semilinear elliptic equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 321: 524－536.

[8] GUO Z M. Some existence and multiplicity results for a class of quasi-linear elliptic eigenvalue problem [J]. Nonlinear Anal, 1992, 18: 957－971.

[9] YIN H H, YANG Z D. Some new results on the existence of bounded positive entire solutions for quasilinear elliptic equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 177: 606－613.

[10] LIEBERMAN G M. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations [J]. Nonlinear Anal, 1988, 12 (11): 1203－1219.

[11] KAMIN S, VERON L. Flat core properties associated to the p-Laplace operator [J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 118 (4): 1079－1085.

[12] LADYZHENSKAYA O A, URAL'TSEVA N N. Linear and quasilinear elliptic equations [M]. New York: Academic Press, 1968.

[13] TOLKSDORF P. On the dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points [J]. Comm Partial Diff Eqns, 1983, 8 (7): 773－817.